

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ КОМПОЗИТА*

Рассмотрено влияние геометрических и механических факторов на деформативные свойства композитов с дискретными включениями. Общие положения конкретизированы для случая включений, имеющих форму эллипсоидов вращения. Даны формулы приведенных (эффективных) модулей упругости композита.

Рассматривается композит с дискретными включениями. Эти включения могут иметь различную физическую природу, в частности быть пустотами – порами. Заметим, что, если дискретные включения прилегают вплотную друг к другу и объединяются в цельную структуру, мы можем говорить о применении предлагаемой методики к композитам, армированным волокнами – нитями, сетками и т.д.

В статьях [1–3] вопрос о зависимости деформативных свойств композита от геометрических параметров, определяющих его структуру, рассмотрен в общем виде. Данная статья посвящена конкретизации общих зависимостей для частного случая включений в виде эллипсоидов вращения. Такая форма включений в наибольшей мере отвечает действительности, когда включениями являются пустоты – поры.

В вышеуказанных статьях приведены формулы, которые можно представить в следующем виде:

$$\frac{E_{\text{пр}}}{E} = \frac{1}{1 - \lambda(1 - J)}; \quad (1)$$

$$J = \int_0^1 \frac{d\xi}{1 + (\alpha - 1) \frac{A_1(\xi)}{A}}. \quad (2)$$

В этих формулах:

$\lambda = h/L$, где L – размер ячейки (представительного элемента) в направлении действующей нагрузки, h – протяженность включения в том же направлении;

$\xi = z/h$, где z – расстояние до рассматриваемого сечения от одного из концов включения;

A – площадь поперечного сечения ячейки, перпендикулярного к направлению действующей нагрузки;

$A_1(\xi)$ – площадь поперечного сечения включения, отстоящего на $z = h\xi$ от начала отсчета ξ ;

$\alpha = E_1/E$, где E_1 – модуль упругости материала включения, E – модуль упругости основного материала (матрицы);

$E_{\text{пр}}$ – приведенный (эффективный) модуль упругости композита.

В настоящей статье рассматриваются включения, имеющие форму эллипсоидов вращения, т.е. обладающие осью симметрии.

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-08-13546.

Вначале рассмотрим случай, когда ось симметрии эллипсоида параллельна направлению действующей нагрузки (рис. 1). Радиус наибольшего кругового сечения, делящего эллипсоид пополам, обозначен через b , а радиус сечения, отстоящего от него на z , через r . Длина половины включения равна h . Имея в виду, что b и h являются полуосями эллиптического сечения включения, из уравнения эллипса получаем $r^2 = b^2(1 - \frac{z^2}{h^2}) = b^2(1 - \xi^2)$ и $A_1(\xi) = \pi b^2(1 - \xi^2)$. При квадратном поперечном сечении ячейки со стороной B имеем $A = B^2$; соответственно $\frac{A_1(\xi)}{A} = \pi\beta^2(1 - \xi^2)$. Здесь использовано обозначение $\beta = b/B$. Подставив найденное выражение $\frac{A_1(\xi)}{A}$ в формулу (2), после некоторых преобразований получим

$$J = \int_0^1 \frac{d\xi}{[1 + \pi(\alpha - 1)\beta^2] - \pi(\alpha - 1)\beta^2\xi^2}. \quad (3)$$

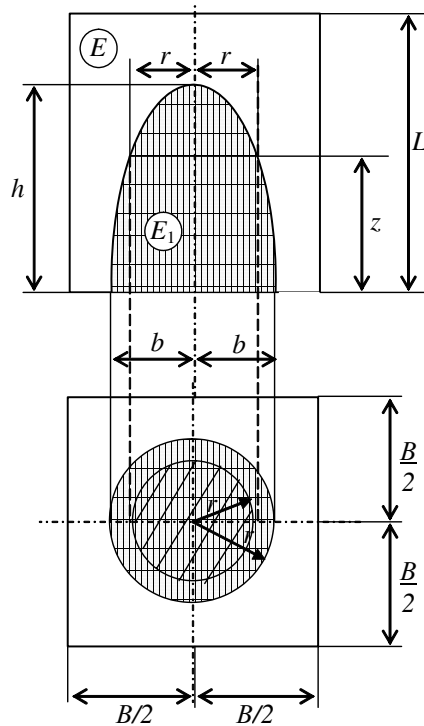


Рис. 1

Интегрируя (3), получим

$$J = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\alpha - 1)\beta}\sqrt{1 + \pi(\alpha - 1)\beta^2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \pi(\alpha - 1)\beta^2} + \beta\sqrt{\pi(\alpha - 1)}}{\sqrt{1 + \pi(\alpha - 1)\beta^2} - \beta\sqrt{\pi(\alpha - 1)}}. \quad (4)$$

Существенно, что при зафиксированном значении α интеграл зависит лишь от параметра β , т.е. $J = J(\beta)$.

На рисунке 2 представлены графики зависимости J от β при $\alpha = 5$ и $\alpha = 10$.

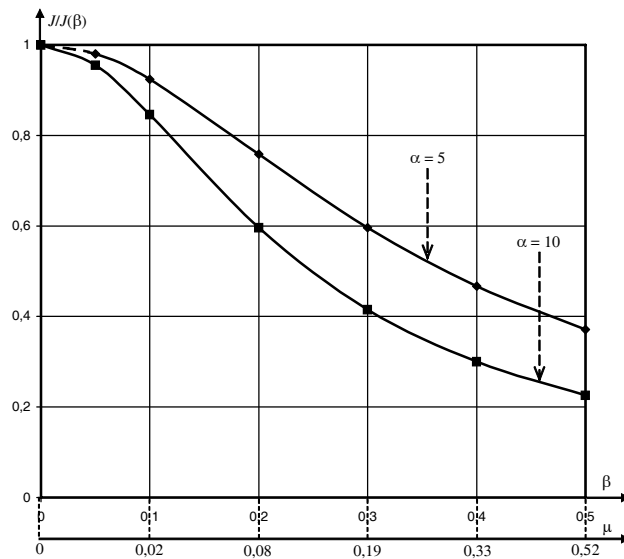


Рис. 2

Формула (1) показывает, что при $\lambda = 1$, т.е. при наибольшей возможной величине этого параметра, $\frac{E_{\text{пр}}}{E} = \frac{1}{J}$. Это значение $\frac{E_{\text{пр}}}{E}$ при фиксированном параметре β является максимально достижимым. На графиках (рис. 3) приведены его значения для $0 \leq \beta \leq 0,5$ при $\alpha = 5$ и $\alpha = 10$.

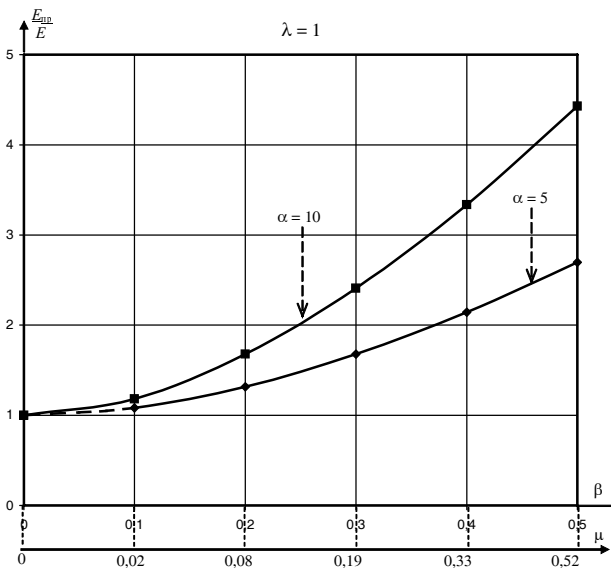


Рис. 3

Объем половины эллипсоида вращения, соответствующий объему включения, равен $V_{\text{вкл}} = \frac{2}{3}\pi b^2 h$, объем ячейки равен $V = B^2 L$. Для коэффициента объемного содержания включений получаем $\mu = \frac{V_{\text{вкл}}}{V} = \frac{2\pi}{3}\beta^2 \lambda$. Максимально возможным значениям $\beta = 0,5$; $\lambda = 1$ отвечает $\mu_{\text{max}} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$. Если зафиксирован параметр β , параметр λ выражается через объемное содержание формулой $\lambda = \frac{3\mu}{2\pi\beta^2} \approx 0,48 \frac{\mu}{\beta^2}$. Если же зафиксировано значение λ , параметр β выражается как $\beta = \sqrt{\frac{3\mu}{2\pi\lambda}} \approx 0,69 \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$.

Графики на рисунке 4 показывают, как $\frac{E_{\text{пр}}}{E}$ зависит от λ при $\alpha = 10$ и разных значениях β . Они построены с использованием формул (1) и (4), а также графиков (рис. 2).

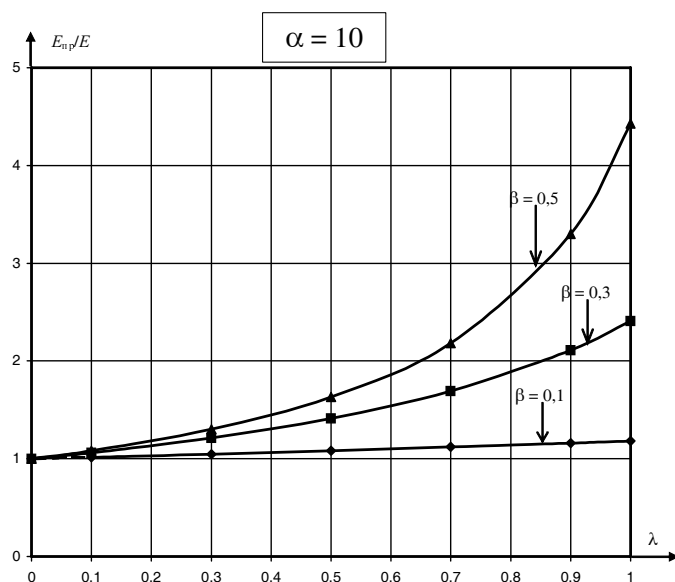


Рис. 4

Подставив $\lambda = \frac{3\mu}{2\pi\beta^2}$ в формулу (1), будем иметь

$$\frac{E_{\text{пр}}}{E} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2\pi} \frac{[1 - J(\beta)]}{\beta^2} \mu}. \quad (5)$$

Согласно этой формуле при использовании формулы (4) и графика (рис. 2), относящегося к $\alpha = 10$, построены кривые, показывающие зависи-

мость $\frac{E_{\text{пр}}}{E}$ от μ , для различных β . Эти кривые, изображенные на рисунке 5, начинаются от $\mu = 0$, $\frac{E_{\text{пр}}}{E} = 1$ и достигают $\frac{E_{\text{пр}}}{E} = \frac{1}{J(\beta)}$ в самой высокой точке при $\mu_{\text{max}} = \frac{2\pi}{3}\beta^2 \approx 2,09\beta^2$.

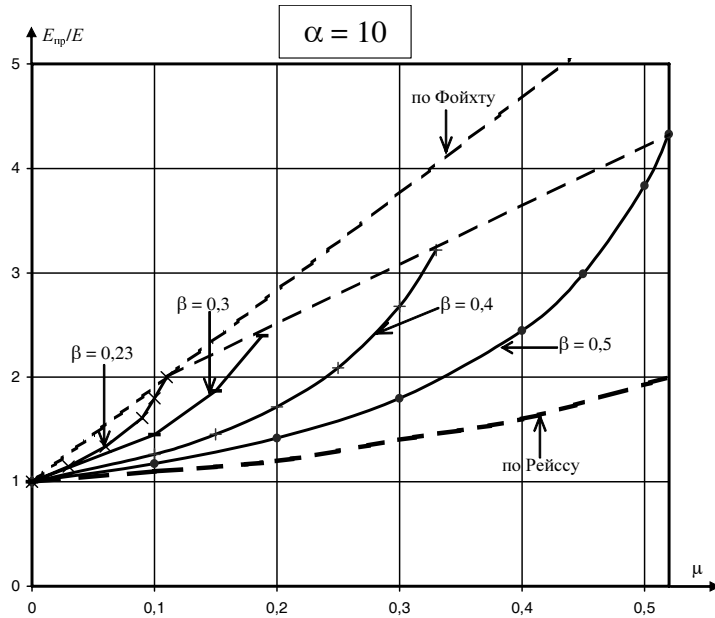


Рис. 5

Представляет интерес анализ зависимости $\frac{E_{\text{пр}}}{E}$ от геометрических параметров, когда фиксируется их отношение $k = \lambda/\beta$. Подстановка $\lambda = k\beta$ в формулу (1) дает

$$\frac{E_{\text{пр}}}{E} = \frac{1}{1 - k\beta[1 - J(\beta)]}. \quad (6)$$

Соответствующие кривые показаны на рисунке 6. Они особенно наглядно говорят о большей эффективности включений, имеющих значительную протяженность в направлении действующего усилия по сравнению с поперечными размерами.

Формула (4) имеет силу при $\alpha > 1$, т.е. при жестких включениях. Когда $\alpha < 1$ (в частности при $\alpha = 0$, пустые поры), формула (3) записывается в виде

$$J = \int_0^1 \frac{d\xi}{1 - (1 - \alpha) \frac{A_1(\xi)}{A}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{[1 - \pi(1 - \alpha)\beta^2] + \pi(1 - \alpha)\beta^2\xi^2}. \quad (7)$$

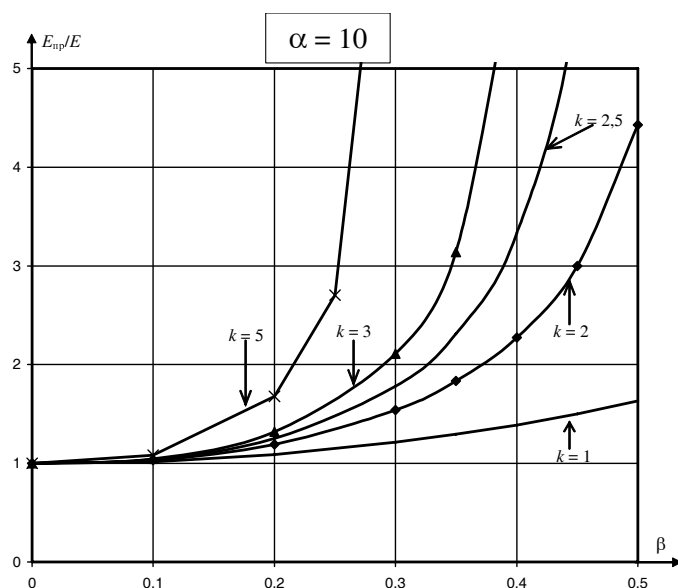


Рис. 6

После интегрирования получим

$$J = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi(1-\alpha)}\sqrt{1-\pi(1-\alpha)\beta^2}} \operatorname{arctg} \frac{\beta\sqrt{\pi(1-\alpha)}}{\sqrt{1-\pi(1-\alpha)\beta^2}}. \quad (8)$$

Когда включениями являются пустые поры ($\alpha = 0$),

$$J = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}\sqrt{1-\pi\beta^2}} \operatorname{arctg} \frac{\beta\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-\pi\beta^2}}. \quad (9)$$

На рисунке 7 представлены кривые, показывающие зависимость E_{np}/E от λ и β при наличии пустых пор.

Перейдем к случаю, когда нагрузка действует перпендикулярно осям симметрии включений (рис. 8). Поперечные сечения включения, перпендикулярные действующему усилию, представляют собой эллипсы. Наибольший из них, лежащий в плоскости основания ячейки, имеет полуоси h и b . Поскольку включение осесимметрично, его высота (протяженность в направлении действия нагрузки) равна b . Поперечное сечение ячейки является прямоугольником со стороной B и $2L$. Высота ячейки (размер в направлении действия нагрузки) равен $B/2$. Объем включения равен $V_{\text{вкл}} = \frac{4}{3}\pi b^2 h$, объем

ячейки $V = 2B^2 L$, коэффициент объемного содержания включений $\mu = \frac{V_{\text{вкл}}}{V} =$

$= \frac{2\pi}{3}\beta^2\lambda \approx 2,09\beta^2\lambda$. Его максимально возможная величина (при $\beta = 0,5$; $\lambda = 1$)

равна $\mu_{\text{max}} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$.

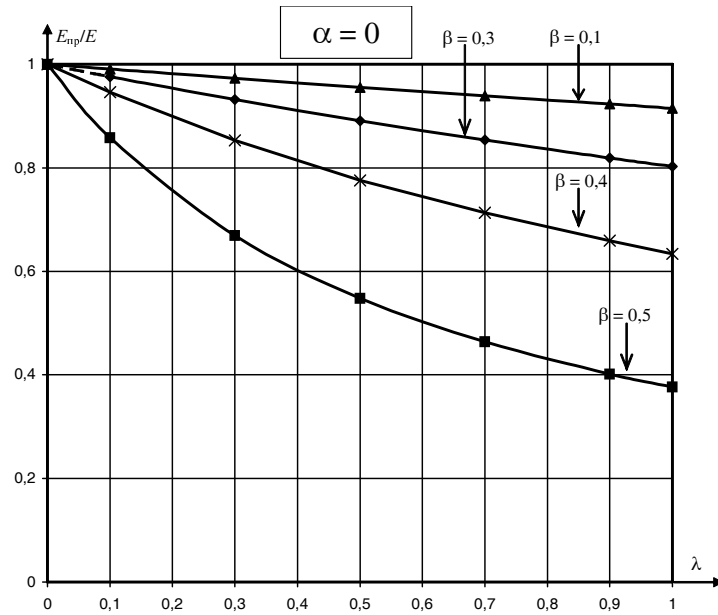


Рис. 7

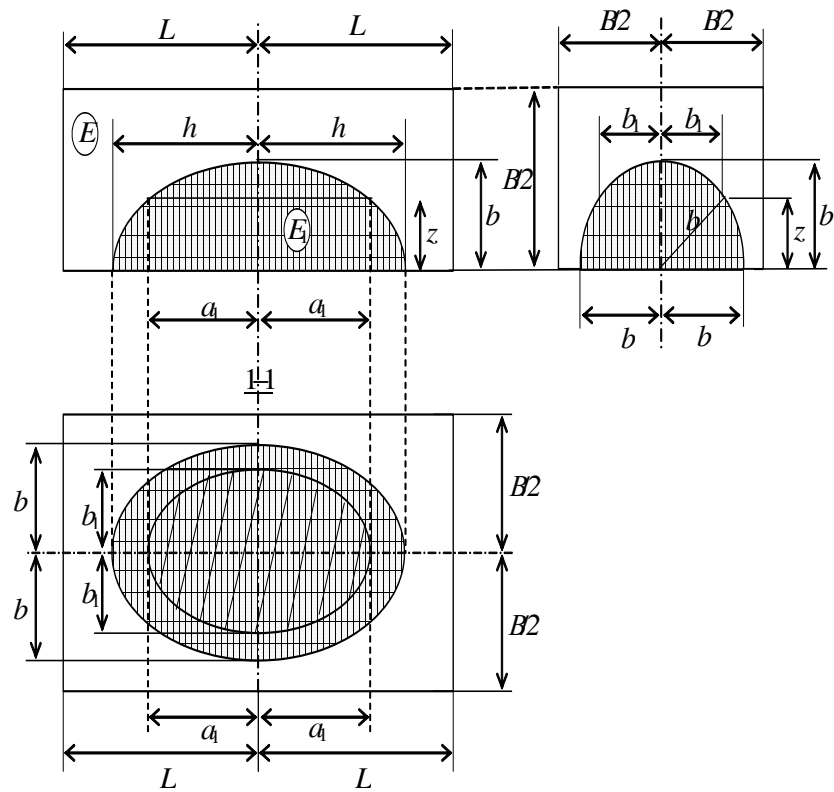


Рис. 8

Сечение, находящееся на расстоянии z от нижнего основания ячейки, представляет собой эллипс с полуосями a_1 и b_1 . Из уравнения эллипса

$\frac{a_1^2}{h^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ находим $a_1 = h\sqrt{1-\xi^2}$, где $\xi = z/b$, из уравнения окружности

$$b_1 = b\sqrt{1-\xi^2}.$$

Таким образом, площадь рассматриваемого эллиптического сечения равна $A_1(\xi) = \pi a_1 b_1 = \pi h b (1-\xi^2)$. Площадь поперечного сечения ячейки составляет $A = 2BL$, а отношение площадей, входящее в формулу (2), записывается как $\frac{A_1(\xi)}{A} = \frac{\pi}{2} \lambda \beta (1-\xi^2)$. Подстановка этого выражения в (2) приводит к формуле

$$J = \int_0^1 \frac{d\xi}{[1 + \frac{\pi}{2} \lambda \beta (\alpha - 1)] - \frac{\pi}{2} (\alpha - 1) \lambda \beta \xi^2}.$$

После интегрирования получаем

$$J = \frac{\ln \left[\sqrt{1 + \frac{\pi}{2} (\alpha - 1) \lambda \beta} + \sqrt{\frac{\pi}{2} (\alpha - 1) \lambda \beta} \right]^2}{2 \sqrt{1 + \frac{\pi}{2} (\alpha - 1) \lambda \beta} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} (\alpha - 1) \lambda \beta}}. \quad (10)$$

При $\alpha = 10$; $\lambda = 1$; $\beta = 0,5$; $\mu = 0,52$ формула (10) дает $J = 0,23$. После этого по формуле (1) получаем $\frac{E_{\text{пр}}}{E} = 4,43$.

Приведенный расчет применим при $\alpha > 1$. Если $\alpha < 1$, интеграл J приобретает вид

$$J = \int_0^1 \frac{d\xi}{1 - (1-\alpha) \frac{A_1(\xi)}{A}}.$$

Подставив сюда

$$\frac{A_1(\xi)}{A} = \frac{\pi}{2} \lambda \beta (1-\xi^2),$$

будем иметь

$$J = \int_0^1 \frac{d\xi}{[1 - (1-\alpha) \frac{\pi}{2} \lambda \beta] + (1-\alpha) \frac{\pi}{2} \lambda \beta \xi^2}.$$

Следовательно,

$$J = \frac{1}{\sqrt{[1 - \frac{\pi}{2} (1-\alpha) \lambda \beta] \frac{\pi}{2} (1-\alpha) \lambda \beta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2} (1-\alpha) \lambda \beta}{1 - \frac{\pi}{2} (1-\alpha) \lambda \beta}}. \quad (11)$$

В частности при $\alpha = 0$ (пустые поры)

$$J = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\pi}{2}\lambda\beta\right)\frac{\pi}{2}\lambda\beta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2}\lambda\beta}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda\beta}}.$$

При $\alpha = 0$; $\lambda = 1$; $\beta = 0,5$; $\mu = 0,52$ будем иметь $J = 2,647$; $\frac{E_{\text{пр}}}{E} = 0,38$.

Список литературы

1. **Черкасов, В. Д.** О влиянии формы включений на деформативные свойства композитов / В. Д. Черкасов, В. А. Карташов, Е. В. Киселев // Вестник Волжского регионального отделения / Нижегородский гос. архитектурно-строительный ун-т. – Вып. 7. – Н. Новгород, 2004. – С. 100–107.
2. **Черкасов, В. Д.** О влиянии формы включений на деформативные свойства композитов / В. Д. Черкасов, В. А. Карташов, Е. В. Киселев [и др.] // Вестник Волжского регионального отделения Российской академии архитектуры и строительных наук. – Вып. 8. – 2005. – С. 121–124.
3. **Черкасов, В. Д.** О влиянии формы включений на деформативные свойства композитов / В. Д. Черкасов, В. А. Карташов, Е. В. Киселев [и др.] // Вестник отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук. – Вып. 9. – Белгород, 2005. – С. 439–446.